224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Soient E un espace métrique, F un espace de Banach sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $f, g\colon D \subset E \to F$ et a un point d'accumulation de D. On notera $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

1 Relations de comparaison

Définition 1. On dit que f est dominée par g au voisinage de a et on note $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$ (ou $f(x) \underset{x\to a}{\preccurlyeq} g(x)$) si

$$\exists C \geqslant 0,\ \exists V \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in V \cap D,\ \|f(x)\| \leqslant C\|g(x)\|.$$

Remarque 2. f est bornée au voisinage de $a \iff f(x) = \underset{x\to a}{O}(1)$.

Définition 3. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a et on note $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ (ou $f(x) \underset{x\to a}{\ll} g(x)$) si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in V \cap D,\ \|f(x)\| \leqslant \varepsilon\|g(x)\|.$$

Notation 4 (Équivalent)**.** $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$.

Remarque 5. Si $\ell \in F$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \iff f(x) - \ell = \underset{x\to a}{o}(1)$.

Si l'on a déjà précisé que $x \to a$ et s'il n'y a pas ambiguïté, on écrira par exemple $f(x) = O(g(x))$ ou $f \preccurlyeq g$ au lieu de $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$.

Exemple 6 (suites)**.** $E = \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ usuel, $a = +\infty$, $F = \mathbf{R}$. Pour tous $\alpha, \beta > 0, \gamma > 1$,

$$1 \ll \log(n)^\alpha \ll n^\beta \ll \gamma^n \ll n! \ll n^n \quad \text{(lorque } n \to +\infty).$$

Exemple 7 (fonctions)**.** $E = \widehat{\mathbf{C}}$ usuel, $a = \infty$, $F = \mathbf{C}$. Pour tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré d, $P(z) = O(z^d)$ lorsque $|z| \to +\infty$.

Attention 8. Il vaut mieux ne plus lire '$=$' comme une égalité à proprement parler, et considérer que $O_{x\to a}(g(x))$ désigne l'ensemble des fonctions (ou bien l'une d'elles) dominées par $g(x)$ lorsque $x \to a$.

Exemple 9. Si $\Pi(x)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, alors $\Pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ lorsque $x \to +\infty$.

Exemple 10. Si $(c_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier d'une fonction f $\mathcal{C}^\infty$ 2π-périodique, alors $\forall k \in \mathbf{N},\ c_n \underset{n\to\pm\infty}{=} o(|n|^{-k})$.

Propriétés 11. (Dans les relations ci-dessous, il est sous-entendu que $x \to a$.)

a) $f(x) = O(g(x)) \iff \|f(x)\| = O(\|g(x)\|)$.

b) "O mange les constantes" : $O(\lambda g) = O(g)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{K}^*$.

c) Si l'on remplace la norme de F par une norme équivalente, on ne change pas O.

d) O est stable par combinaison linéaire : $O(g) + O(g) = O(g)$ et $\lambda \cdot O(g) = O(g)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$.

e) Si $f(x) = O(g(x))$ alors $\|f(x)\|^\alpha = O(\|g(x)\|^\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+$.

f) Si $f_1(x) = O(g_1(x))$ et $f_2(x) = O(g_2(x))$, et si B est bilinéaire continue, alors $B(f_1(x), f_2(x)) = O(\|g_1(x)\|\|g_2(x)\|)$.

(On a des propriétés analogues pour la relation de négligeabilité.)

g) Si $f \preccurlyeq g$ et g est nulle au voisinage de a, alors f aussi.

h) $\preccurlyeq$ est réflexive ; $\preccurlyeq$ et $\ll$ sont transitives.

i) "Un o est un O" : $o(g) = O(g)$.

j) "Un o d'un O est un o" : $f = O(g) \implies o(f) = o(g)$.

k) "Un O d'un o est un o" : $f = o(g) \implies O(f) = o(g)$.

l) Changement de variable. Soient b un point d'accumulation d'une partie D' d'un espace métrique, et $\varphi\colon D' \to D$ telle que $\varphi(y) \to a$ lorsque $y \to b$. Alors $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x)) \implies f\circ\varphi(y) = \underset{y\to b}{O}(g\circ\varphi(y))$, et on a la même formule pour o.

Exemple 12. Pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$, $P(n)e^{-n} = o(1)$.

Exemple 13. Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,

$$\det(\mathrm{Id} + H) = 1 + \mathrm{tr}(H) + O(H^2) \quad \text{lorsque } H \to 0.$$

2 Développements asymptotiques

2.1 Définitions et exemples

Définition 14. Une *échelle de comparaison* au point a est une famille $\mathcal{E}_a$ de fonctions définies au voisinage de a (sauf peut-être en a) telle que

$$\forall (h,k) \in {\mathcal{E}_a}^2, \quad h \neq k \implies \Big(h \underset{a}{\ll} k \text{ ou } k \underset{a}{\ll} h\Big).$$

Exemple 15. $\{x \mapsto (\log x)^\alpha x^\beta e^{cx^\gamma} \mid \alpha, \beta, c \in \mathbf{R},\ \gamma > 0\}$ est une échelle de comparaison en $+\infty$ pour les fonctions de la variable réelle.

Définition-proposition 16. Soit $m \in \mathbf{N}^*$. On appelle *développement asymptotique* à m termes de $f\colon D \to F$ par rapport à une échelle de comparaison $\mathcal{E}_a$ au voisinage de a toute expression de la forme $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m$ vérifiant

1. $c_i \in \mathbf{K}$ et $f_i \in \mathcal{E}_a$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$,
2. $f_i \underset{a}{\ll} f_{i+1}$ pour tout $1 \leqslant i < m$,
3. $f(x) = \sum_{i=1}^m c_i f_i(x) + \underset{x\to a}{o}(f_m(x))$.

Si l'on impose de plus que $c_m \neq 0$, un tel développement est unique. Dans le cas particulier où D est un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$, et $f_i\colon x \mapsto (x-a)^i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, on parle de *développement limité* à l'ordre m en a.

Exemple 17. Soit p_n le périmètre du polygône régulier à n sommets inscrit dans le cercle unité. Alors $p_n = 2\pi - \frac{\pi}{3n^2} + \frac{\pi^5}{60n^4} + o(\frac{1}{n^5})$.

Théorème 18 (Formule de Taylor-Young)**.** On suppose que D est un intervalle de $\mathbf{R}$ et que $f\colon D \to F$ est dérivable n fois en $a \in D$. Alors

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!} + \underset{h\to 0}{o}(h^n).$$

Exemple 19 ([Gou, p. 90])**.** $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{15} + \frac{17x^7}{315} + \underset{x\to 0}{o}(x^7)$.

Applications 20. Les développements asymptotiques permettent de déterminer la limite d'une forme indéterminée, de préciser la position relative d'une courbe par rapport à une tangente ou une asymptote, de calculer les parties polaires de fractions rationnelles.

Exemple 21. Pour tout $z \in \mathbf{C}$, $(1 + \frac{z}{n})^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^z$.

Exemple 22. Soit $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

- $f(x) = x^3(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{120x^5} + o(\frac{1}{x^5})) = x^2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ lorsque $x \to \pm\infty$. La parabole d'équation $y = x^2 - \frac{1}{6}$ est donc asymptote (par valeurs inférieures) à la courbe représentative de f en $\pm\infty$.
- f admet le $\mathsf{DL}_2(0)$ $f(x) = O(x^3) = o(x^2)$. f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Pour autant, f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exemple 23. Soit la fraction rationnelle $f(X) := \frac{X^2+1}{X^3(X+1)}$. On a $x^3 f(x) = (x^2+1)(1 - x + x^2 + o(x^2)) = 1 - x + 2x^2 + o(x^2)$ lorsque $x \to 0$, donc la partie polaire de f relative au pôle 0 est $\frac{1}{X^3} - \frac{1}{X^2} + \frac{2}{X}$.

2.2 Obtention de développements asymptotiques

Proposition 24 (Comparaison série-intégrale, [Gou, p. 204])**.** Soit f une fonction de $[n_0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}_+$ décroissante. Alors $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ et $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature, et

1. s'il y a divergence, $\sum_{k=n_0}^n f(k) - \int_{n_0}^n f(t)\mathrm{d}t$ converge dans $\mathbf{R}_+$,
2. sinon, $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k>n} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Exemple 25 (Série harmonique)**.** Soit $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, n \geqslant 1$. Il existe $\gamma \in \mathbf{R}_+$ tel que $H_n = \log(n) + \gamma + o(1)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exemple 26. Pour tout $0 < \alpha < 1$, $\sum_{k=1}^n k^{-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha} + o(n^{1-\alpha})$. Pour tout $\alpha > 1$, $\sum_{k>n} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} n^{1-\alpha} + o(n^{1-\alpha})$.

Théorème 27 (Sommation des relations de comparaison, [Gou])**.** Soient $\sum u_n \in F$ et $\sum v_n \in \mathbf{R}_+$ deux séries telles que $u_n = o(v_n)$.

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ cv. (abs.) et $\sum_{k>n} u_n = o(\sum_{k>n} v_n)$.
2. Si $\sum v_n$ diverge alors $\sum_{k\leqslant n} u_n = o\big(\sum_{k\leqslant n} v_n\big)$.

Exemple 28. Soit pour tout $n \geqslant 1$, $\varepsilon_n := H_n - \log(n) - \gamma$. Alors $\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \log(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$, donc $\varepsilon_n = \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$. D'où $H_n = \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$ lorsque $n \to +\infty$.

Exemple 29 (Sinus itéré, [Gou, p. 219])**.** Soient $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour $n \geqslant 1$, $u_n = \sin(u_{n-1})$. Alors $u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\log n}{n\sqrt{n}} + o(\frac{\log n}{n\sqrt{n}})$. $\boxed{\text{DÉV. 1}}$

Théorème 30 (Intégration des relations de comparaison, [Gou])**.** Soient $f\colon [a,b[\to \mathbf{K}$, $g\colon [a,b[\to \mathbf{R}_+$ deux applications localement intégrables sur $[a,b[$ $(-\infty < a < b \leqslant +\infty)$ telles que $f(x) = \underset{x\to b^-}{o}(g(x))$.

1. Si g est intégrable, alors f aussi et $\int_x^b f(t)\mathrm{d}t = \underset{x\to b^-}{o}\left(\int_x^b g(t)\mathrm{d}t\right)$.
2. Si g n'est pas intégrable alors $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \underset{x\to b^-}{o}\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)$.

(Les théorèmes 27 et 30 admettent des énoncés analogues pour O.)

Exemple 31 (Logarithme intégral, [Gou, p. 169])**.**

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} = \frac{x}{\log x} \sum_{k=0}^n \frac{k!}{\log^k x} + o\left(\frac{x}{\log^{n+1} x}\right) \quad \text{lorsque } x \to +\infty.$$

Applications 32. Les développements asymptotiques peuvent être utilisés pour étudier la convergence d'une série ou d'une intégrale.

Exemple 33 ([Gou, p. 214])**.** $\sum_{\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1/2$.

Exemple 34. La série $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ est convergente.

2.3 Autres méthodes

Théorème 35 (Méthode de Laplace, [Far, cas $n = 1$ ou 2, p. 103])**.** Soient $f\colon [a,b[\to \mathbf{R}$ et $\varphi \in \mathcal{C}^n([a,b[,\mathbf{R})$ $(n \geqslant 1)$ telles que :

(i) f est continue en a et $f(a) \neq 0$;

(ii) φ admet en a un minimum global strict, $\varphi(b^-) > \varphi(a)$, $\varphi^{(i)}(a) = 0$ pour tout $1 \leqslant i < n$ et $\varphi^{(n)}(a) > 0$;

(iii) il existe $t_0 > 0$ tel que $x \mapsto e^{-t\varphi(x)} f(x)$ est Lebesgue-intégrable pour tout $t \geqslant t_0$.

Alors, en notant Γ la fonction Gamma d'Euler, $\boxed{\text{DÉV. 2}}$

$$I(t) := \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x \underset{x\to a}{\sim} \frac{\Gamma(1/n)}{n} f(a) \sqrt[n]{\frac{n!}{\varphi^{(n)}(a)t}} e^{-\varphi(a)t}.$$

Application 36 (Formule de Stirling)**.** $\Gamma(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} t^{t+1/2} e^{-t}$.

Théorème 37 (Formule d'Euler-Maclaurin, [Gou, p. 301])**.** Soient $m < n$ dans $\mathbf{Z}$, $r \in \mathbf{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^r([m,n],\mathbf{C})$. Alors

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}[f(m) + f(n)] + \sum_{k=2}^r \frac{b_k}{k!}[f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)] + \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int_m^n \tilde{B}_r(t) f^{(r)}(t)\mathrm{d}t,$$

où
- $(B_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est la suite des polynômes de Bernoulli définie par $B_0 = 1$ et $B_k' = kB_{k-1}$, $\int_0^1 B_k(x)\mathrm{d}x = 0$ pour tout $k \geqslant 1$,
- pour tout $k \in \mathbf{N}$, $b_k = B_k(0)$ et $\tilde{B}_k$ est la fonction 1-périodique sur $\mathbf{R}$ qui coïncide avec B_k sur $]0,1[$ et vaut $\frac{1}{2}(B_k(0) + B_k(1))$ en 0.

Application 38. $H_n = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{k=2}^{r-1} \frac{(-1)^{k-1} b_k}{k} n^{-k} + O(n^{-r})$ pour tout $r \in \mathbf{N}^*$.

3 Autres exemples de développements asymptotiques

Exemple 39 ([BBR, p. 27])**.** Soit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, d_n le nombre de diviseurs (dans $\mathbf{N}^*$) de l'entier n. Alors

$$\sum_{n \leqslant x} d_n = x \log x + (2\gamma - 1) + \underset{x \to +\infty}{O}(\sqrt{x})$$

où γ est la constante de l'exemple 25.

Exemple 40. Lorsque $x \to +\infty$,

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2\frac{\cos x}{x^3} + 6\frac{\sin x}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^5}\right).$$

Exemple 41 ([Die, p. 98])**.** Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = e^{-x^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2k)!}{k! 2^{2k+1} x^{2k+1}} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}}\right).$$

Exemple 42 (Perturbation d'une équation différentielle)**.** Soit

$$E_\varepsilon : \begin{cases} x'' + x + \varepsilon x^2 = 0 \\ x(0) = 0, \; x'(0) = 1 \end{cases}, \quad \varepsilon \geqslant 0.$$

- La solution de E_0 est $x_0(t) = \sin(t)$.
- On peut chercher une solution de E_ε au premier ordre en ε : $x_\varepsilon(t) = x_0(t) + \varepsilon\omega(t) + O(\varepsilon^2)$ uniformément en t, avec $\omega(t)$ à déterminer. En réinjectant dans E_ε, $\omega(t)$ doit vérifier $\omega'' + \omega + \sin^2 t = 0$, $\omega(0) = 0$, $\omega'(0) = 0$. On trouve $x_\varepsilon(t) = \sin(t) + \varepsilon \frac{4\cos(t) - \cos(2t) - 3}{6}$.

e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\cosh(x)$	$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$
$\sinh(x)$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$
$\tanh(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$
$\tan(x)$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$
$(1+x)^\alpha \quad (\alpha \in \mathbf{R})$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\log(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\arctan(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2})$
$\arcsin(x)$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots + \frac{\binom{2p}{p} x^{2p+1}}{4^p (2p+1)} + o(x^{2p+2})$
$\mathrm{argth}(x)$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o(x^{2p+2})$
$\mathrm{argsh}(x)$	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots + (-1)^p \frac{\binom{2p}{p} x^{2p+1}}{4^p (2p+1)} + o(x^{2p+2})$

Figure 1 – Développements limités des fonctions usuelles.

Références

[BBR] Nicolas Bonnault, Jean-François Burnol et Philippe Roche : *Analyse, Math Sup & Math Spé : exercices corrigés posés à l'oral des concours.*

[Die] Jean Dieudonné : *Calcul infinitésimal.* 2ème édition.

[Far] Jacques Faraut : *Calcul intégral.*

[Gou] Xavier GOURDON : *Analyse.* 2ème édition.

[Rou] François ROUVIÈRE : *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.* 3ème édition.

Autres développements possibles

— Méthode du col [Die].

— Méthode de la phase stationnaire [Die].

— Développements asymptotiques de fonctions arithmétiques.