# 924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

## 1 Syntaxe

**Définition 1.** Un *langage du premier ordre* est un ensemble de *symboles de fonction* $\mathcal{F}$ et de *symboles de relation* $\mathcal{P}$, chaque symbole $s$ ayant une arité $a(s) \in \mathbf{N}$. Les *constantes* sont les symboles de fonction d'arité 0.

**Exemple 2.** $\mathcal{F} \coloneqq \{0(0), +(2), \mathrm{s}(1)\}$, $\mathcal{P} \coloneqq \{=(2)\}$.

**Définition 3.** Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables. L'ensemble des *termes* $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ est défini par la grammaire

$$\mathcal{T} = \mathcal{X} \mid f(\underbrace{\mathcal{T}, \ldots, \mathcal{T}}_{a(f) \text{ fois}}), \quad f \in \mathcal{F}.$$

$\mathcal{T}(\mathcal{F})$ est l'ensemble des termes *clos*, i.e. ne contenant pas de variable.

**Exemple 4.** $s(0) + (x + y)$ est un terme (en notation infixe).

**Définition 5.** L'ensemble des *formules atomiques* est défini par la grammaire

$$\mathcal{A} = R(\underbrace{\mathcal{T}, \ldots, \mathcal{T}}_{a(R) \text{ fois}}), \quad R \in \mathcal{P}.$$

Les formules (du premier ordre) sont alors définies par la grammaire

$$\varphi = \mathcal{A} \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \to \varphi \mid \neg\varphi \mid \exists x\ \varphi \mid \forall x\ \varphi, \quad x \in \mathcal{X}.$$

On note $\mathrm{BV}(\varphi)$ (resp. $\mathrm{FV}(\varphi)$) l'ensemble des *variables liées* (resp. *libres*) apparaissant dans $\varphi$. On dit que $\varphi$ est *close* si $\mathrm{FV}(\varphi) = \varnothing$.

**Exemple 6.** $\varphi \coloneqq \exists y\ \neg(x = y) \wedge (\forall x\ x = x)$ est une formule. On a $\mathrm{BV}(\varphi) = \{x, y\}$ et $\mathrm{FV}(\varphi) = \{x\}$.

**Définition 7.** Une *théorie* $T$ est un ensemble de formules closes. Les éléments de $T$ sont appelés *axiomes*.

## 2 Sémantique [GLM]

### 2.1 Modèles

**Définition 8.** Un *modèle* $\mathcal{M}$ de $\mathcal{F}, \mathcal{P}$ (aussi appelé $\mathcal{F}, \mathcal{P}$*-structure*) est une interprétation des symboles, i.e. la donnée d'un *domaine* (encore noté $\mathcal{M}$), d'une fonction $f_{\mathcal{M}} \colon \mathcal{M}^{a(f)} \to \mathcal{M}$ pour tout $f \in \mathcal{F}$, et d'un sous-ensemble $R_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}^{a(R)}$ pour tout $R \in \mathcal{P}$.

**Exemple 9.** $\mathcal{M} \coloneqq \mathbf{N}$, $s_{\mathcal{M}} \colon n \mapsto n + 1$, $=_{\mathcal{M}} \coloneqq \{(n, n) \mid n \in \mathbf{N}\}$, etc.

**Remarque 10.** $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ sont des $\mathcal{F}$-structures naturelles.

**Définition-proposition 11.** Une $\mathcal{M}$-*affectation* $\sigma$ est l'unique prolongement à $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ d'une application $\mathcal{X} \to \mathcal{M}$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \sigma(f(t_1, \ldots, t_{a(f)}) = f_{\mathcal{M}}(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_{a(f)})).$$

**Définition 12.** Soient $\mathcal{M}$ un modèle et $\sigma$ une $\mathcal{M}$-affectation. On définit la *relation de satisfaction* par induction sur la structure des formules :

- $\mathcal{M}, \sigma \vDash R(t_1, \ldots, t_{a(R)})$ si $(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n)) \in R_{\mathcal{M}}$,
- $\mathcal{M}, \sigma \vDash \phi \vee \psi$ si $\mathcal{M}, \sigma \vDash \phi$ ou $\mathcal{M}, \sigma \vDash \psi$,
- $\mathcal{M}, \sigma \vDash \phi \wedge \psi$ si $\mathcal{M}, \sigma \vDash \phi$ et $\mathcal{M}, \sigma \vDash \psi$,
- $\mathcal{M}, \sigma \vDash \phi \to \psi$ si $\mathcal{M}, \sigma \vDash \phi$ implique $\mathcal{M}, \sigma \vDash \psi$,
- $\mathcal{M}, \sigma \vDash \neg\phi$ si $\mathcal{M}, \sigma \nvDash \phi$,
- $\mathcal{M}, \sigma \vDash \exists x\ \phi$ s'il existe $a \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M}, \sigma \sqcup \{x \to a\} \vDash \phi$,
- $\mathcal{M}, \sigma \vDash \forall x\ \phi$ si pour tout $a \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M}, \sigma \sqcup \{x \to a\} \vDash \phi$.

On parle alors de *satisfiabilité* d'une formule. On dit aussi qu'une formule est *valide* lorsque sa négation n'est jamais satisfiable.

**Définition 13.** Soit $T$ une théorie. On note $\mathcal{M} \vDash T$ (« $\mathcal{M}$ est un modèle de $T$ ») si $\mathcal{M} \vDash \phi$ pour tout $\phi \in T$ ; lorsqu'un tel $\mathcal{M}$ existe on dit que $T$ est *non contradictoire*. On note aussi $T \vDash \phi$ (« $\phi$ est conséquence logique de $T$ ») si tout modèle de $T$ est un modèle de $\phi$, et $\mathrm{Th}(T)$ (resp. $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$) l'ensemble des formules closes $\phi$ telles que $T \vDash \phi$ (resp. $\mathcal{M} \vDash \phi$).

**Exemple 14.** $(\mathbf{C}^*, \times)$ et $(\mathbf{Z}/42\mathbf{Z}, +)$ sont deux modèles de la *théorie des groupes*, constituée des axiomes

$$\begin{cases} \forall x\ \forall y\ \forall z\ [(x \star y) \star z = x \star (y \star z)] \\ \exists e\ \forall x\ [x \star e = x \wedge e \star x = x] \\ \forall x\ \exists y\ [x \star y = e \wedge y \star x = e] \end{cases}$$

(en plus des axiomes de l'égalité exprimant que '$=$' est une congruence).

## 2.2 Formes prénexe et de Skolem

**Définition 15.** Une formule est *sous forme prénexe* si elle s'écrit $Q_1 x_1\ \cdots\ Q_n x_n\ \varphi$ où $Q_1, \ldots, Q_n$ sont des quantificateurs $(\forall, \exists)$ et $\varphi$ est une formule non quantifiée. Lorsque $Q_1 = \cdots = Q_n = \exists$ (resp. $\forall$), la formule est dite *existentielle* (resp. *universelle*).

**Proposition 16.** Toute formule peut être transformée en une formule sous forme prénexe ayant les mêmes modèles.

**Proposition 17** (skolémisation)**.** Toute formule peut être transformée en une formule existentielle (resp. universelle) en préservant la validité (resp. satisfiabilité). (L'idée est de rendre les quantifications existentielles "implicites" en utilisant de nouveaux symboles de fonction.)

## 2.3 Théorème de Herbrand

*Il n'est jamais nécessaire, s'agissant d'établir l'inconsistance, de produire des instantiations avec autre chose que le lexique.* — W. Quine

On suppose que $\mathcal{F}$ contient une constante.

**Définition 18.** On dit qu'une $\mathcal{F}, \mathcal{P}$-structure $\mathcal{M}$ est un *modèle de Herbrand* si $\mathcal{M} = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ et pour tous $f \in \mathcal{F}$ et $t_1, \ldots, t_{a(f)} \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$, $f_{\mathcal{M}}(t_1, \ldots, t_{a(f)}) = f(t_1, \ldots, t_{a(f)})$. Un modèle de Herbrand s'identifie donc à l'ensemble des atomes clos qu'il satisfait.

**Théorème 19** (Herbrand)**.** Sur $\mathcal{F}, \mathcal{P}$, un ensemble de formules universelles closes a un modèle si et seulement s'il a un modèle de Herbrand.

**Proposition 20.** Soit $T$ une théorie. Alors $T$ est non contradictoire si et seulement s'il existe $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ et un $\mathcal{F}', \mathcal{P}$-modèle de Herbrand de $T$.

### Deux corollaires

**Corollaire 21** (Compacité)**.** Une théorie est contradictoire si et seulement si elle possède un sous-ensemble fini contradictoire.

**Exemple 22.** La connexité d'un graphe n'est pas exprimable au premier ordre.

**Définition 23.** On dit qu'un modèle est *équationnel* s'il interprète une relation binaire comme l'égalité dans ce modèle.

**Corollaire 24** (Löwenheim–Skolem)**.** Soit $T$ une théorie admettant un modèle équationnel infini. Alors $T$ a un modèle équationnel de tout cardinal infini.

## 2.4 Complétude de la déduction naturelle

**Théorème 25.** Le système **NK** est complet : $\vDash \phi \iff \vdash_{\mathbf{NK}} \phi$.

# 3 Exemples de théories [DNR]

**Définition 26.** Soit $T$ une théorie. On dit que $T$ est *cohérente* si pour toute formule close $\phi$, $T \nvDash \phi$ ou $T \nvDash \neg\phi$. On dit que $T$ est *complète* si pour toute formule close $\phi$, $T \vDash \phi$ ou $T \vDash \neg\phi$.

**Lemme 27.** Soit $\mathcal{M}$ un modèle. $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ est cohérente et complète.

**Lemme 28.** Soit $T$ une théorie. Si $T$ est récursif alors $\mathrm{Th}(T)$ est récursivement énumérable.

## 3.1 Théorie de l'égalité

C'est la théorie constituée des seuls axiomes de l'égalité, sur le langage $\mathcal{F} := \varnothing$, $\mathcal{P} := \{=(2)\}$.

**Théorème 29.** La théorie de l'égalité est décidable.

## 3.2 Arithmétique élémentaire

C'est la théorie $Q$ constituée (en plus des axiomes de l'égalité) de :

$A_1$ : $\forall x\ \{Sx \neq 0\}$,
$A_2$ : $\forall x\ \{x = 0 \vee \exists y\ (x = Sy)\}$,
$A_3$ : $\forall x, y\ \{Sx = Sy \to x = y\}$,
$A_4$ : $\forall x\ \{x + 0 = x\}$,
$A_5$ : $\forall x, y\ \{x + Sy = S(x + y)\}$,
$A_6$ : $\forall x\ \{x \times 0 = 0\}$,
$A_7$ : $\forall x, y\ \{x \times Sy = x \times y + x\}$.

**Théorème 30.** $\mathrm{Th}(Q)$ n'est ni complète ni décidable.

## 3.3 Arithmétique de Peano

C'est la théorie $\mathrm{PA} := Q \cup \mathrm{Rec}$ où Rec est l'ensemble des axiomes

$$\{\phi(0) \wedge (\forall x\ \phi(x) \to \phi(Sx))\} \to \forall x\ \phi(x),$$

avec $\phi$ une formule du premier ordre ayant une variable libre.

**Proposition 31.** $\mathrm{Th}(\mathrm{PA})$ est une théorie non contradictoire.

**Proposition 32.** $\mathrm{Th}(Q) \subsetneq \mathrm{Th}(\mathrm{PA})$.

**Théorème 33.** $\mathrm{Th}(\mathrm{PA})$ n'est ni ni complète ni décidable.

## 3.4 Arithmétique de Presburger [Sip]

L'ensemble des entiers naturels $\mathbf{N}$ est une structure du premier ordre sur le langage $\mathcal{F} := \{0(0), 1(0), +(2)\}$, $\mathcal{P} := \{=(2)\}$. La théorie associée est appelée *arithmétique de Presburger*.

**Théorème 34.** L'arithmétique de Presburger est décidable. $\boxed{\text{Dév. 2}}$

La théorie usuelle (avec la multiplication) est par contre indécidable :

**Théorème 35.** $\mathrm{Th}(\mathbf{N}, 0, 1, +, \times)$ n'est pas récursivement énumérable.

**Corollaire 36.** $\mathrm{Th}(\mathrm{PA}) \subsetneq \mathrm{Th}(\mathbf{N}, 0, 1, +, \times)$.

## 3.5 Théorie des réels

L'ensemble des réels $\mathbf{R}$ est une structure du premier ordre sur le langage $\mathcal{F} := \{0(0), 1(0), +(2), \times(2)\}, \mathcal{P} := \{\leqslant(2), =(2)\}$. La théorie assicuée est appelée *théorie des réels*.

**Théorème 37.** La théorie des réels est décidable.

## 3.6 Théorie des ordres denses

C'est la théorie $T_o$ des ordres stricts ($O_1$ et $O_2$), totaux ($O_3$), denses ($O_4$), sans plus grand ni plus petit élément ($O_5$ et $O_6$) :

$O_1$ : $\forall x, y\ \neg\{x < y \wedge y < x\}$,
$O_2$ : $\forall x, y, z\ \{x < y \wedge y < z \to x < z\}$,
$O_3$ : $\forall x, y\ \{x < y \vee x = y \vee y < x\}$,
$O_4$ : $\forall x, y\ \exists z\ \{x < y \to (x < z \wedge z < y)\}$,
$O_5$ : $\forall x\ \exists y\ \{x < y\}$,
$O_6$ : $\forall x\ \exists y\ \{y < x\}$.

**Théorème 38.** La théorie des ordres denses est non contradictoire, complète et décidable.

# Références


[DNR] René David, Karim Nour et Christophe Raffali : *Introduction à la logique : théorie de la démonstration.*

[GLM] Jean Goubault-Larrecq et Ian Mackie : *Proof Theory and Automated Deduction.*

[Sip] Michael Sipser : *Introduction to the Theory of Computation.*