

Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ continue. On note $\omega: h \in \mathbf{R}_+ \mapsto \sup\{|f(y) - f(x)| \mid |x - y| \leq h\}$ son module de continuité, et pour $n \in \mathbf{N}^*$, $B_n := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k} f(\frac{k}{n})$ le n -ième polynôme de Bernstein de f .

Théorème 1 (Weierstraß, [QZ, p. 518]). $\|B_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Plus précisément $\|B_n - f\|_\infty \leq \frac{3}{2} \omega(n^{-1/2})$.

Lemme 2. Pour tous $\lambda, t \in \mathbf{R}_+$, $\omega(\lambda t) \leq (\lambda + 1)\omega(t)$.

Preuve. $\omega(0) = 0$ et ω est sous-additive : si $|x - y| \leq t + t'$ alors il existe $z \in [x, y]$ tel que $|x - z| \leq t$ et $|z - y| \leq t'$, donc $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \leq \omega(t) + \omega(t')$, puis $\omega(t + t') \leq \omega(t) + \omega(t')$. On en déduit par récurrence que $\omega(kt) \leq k\omega(t)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}_+$. On conclut par croissance de ω : si $\lambda, t \in \mathbf{R}_+$, alors $\omega(\lambda t) \leq \omega(\lceil \lambda \rceil t) \leq \lceil \lambda \rceil \omega(t) \leq (\lambda + 1)\omega(t)$. ■

Démonstration du théorème 1. Soient $x \in [0, 1]$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. selon Bernoulli(x). Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n := X_1 + \dots + X_n$ suit une loi Binom(n, x). En effet

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \mathbf{P}(k \text{ parmi } n \text{ des } X_i, 1 \leq i \leq n, \text{ valent } 1) = \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}.$$

Rappelons que $\mathbb{E}[S_n] = nx$ et $\mathbb{V}[S_n] = nx(1 - x)$.

On observe alors que $\mathbb{E}[f(S_n/n)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} f(k/n) =: B_n(x)$. D'où, pour tout $0 < \delta \leq 1$,

$$\begin{aligned} |B_n(x) - f(x)| &\leq \mathbb{E} \left[\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| \mathbf{1}_{\{| \frac{S_n}{n} - x | \leq \delta \}} \right] + \mathbb{E} \left[\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| \mathbf{1}_{\{| \frac{S_n}{n} - x | > \delta \}} \right] \\ &\leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbf{P}(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| > n\delta) \\ &\leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \frac{\mathbb{V}[S_n]}{n^2 \delta^2}, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Bienaymé–Chebyshev, où $\mathbb{V}[S_n] = nx(1 - x) \leq n/4$. Ainsi

$$\begin{aligned} \|B_n - f\|_\infty &\leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} \\ &\leq \omega(n^{-1/3}) + \frac{\|f\|_\infty}{2} n^{-1/3} \quad (\delta := n^{-1/3}) \\ &= o_{n \rightarrow +\infty}(1), \end{aligned}$$

vu l'uniforme continuité de f sur $[0, 1]$ (théorème de Heine). En utilisant le lemme 2 avec $t := n^{-1/2}$ et $\lambda := n^{-1/2}|S_n/n - x|$, on obtient plus précisément

$$\begin{aligned} |B_n(x) - f(x)| &\leq \mathbb{E} \left[\omega \left(\left| \frac{S_n}{n} - x \right| \right) \right] \\ &\leq \omega(n^{-1/2}) \mathbb{E} [n^{-1/2} |S_n - nx| + 1] \\ &= \omega(n^{-1/2}) [n^{-1/2} \|S_n - nx\|_1 + 1] \\ &\leq \omega(n^{-1/2}) [n^{-1/2} \|S_n - nx\|_2 + 1] \quad (\text{Jensen}) \\ &\leq \omega(n^{-1/2}) [\sqrt{x(1 - x)} + 1] \\ \|B_n - f\|_\infty &\leq \frac{3}{2} \omega(n^{-1/2}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 3. Pour $f: t \in [0, 1] \mapsto |t - 1/2|$, $\omega(t) = t$. Avec des Bernoulli de paramètre $1/2$ nous avons, d'après le théorème central limite, $\sqrt{4n}(S_n/n - 1/2) \xrightarrow{d} X$ où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Grâce au *continuous mapping theorem* ($|\cdot|$ étant continue) on en déduit que $\sqrt{4n}f(S_n/n) \xrightarrow{d} |X|$. Or $\|B_n - f\|_\infty \geq |B_n(1/2)| = \mathbb{E}[f(S_n/n)]$ donc d'après le lemme de Fatou $\liminf \sqrt{4n}\|B_n - f\|_\infty \geq \mathbb{E}[|X|] = \sqrt{2/\pi}$, ce qui implique que $\omega(n^{-1/2}) = O(\|B_n - f\|_\infty)$. L'approximation en $1/\sqrt{n}$ par les polynômes de Bernstein est donc optimale.

Références. [QZ, p. 518]

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

[QZ] Hervé QUEFFÉLEC et Claude ZUILY : *Analyse pour l'agrégation*. 4^{ème} édition.