Proposition 1 ([Gou, p. 329])**.** Soient E un espace euclidien (de dimension finie), et $f\colon E \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \in E$, $\mathrm{d}_x f$ est une isométrie linéaire de E. Alors f est une isométrie affine de E.

Preuve.

Étape 1. $\mathrm{d}_a f$ est une isométrie pour tout $a \in E$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis, $\|f(x)-f(y)\| \leqslant \|x-y\|$ pour tous $x, y \in E$. Soit $a \in E$. $\mathrm{d}_a f \in \mathsf{O}(E) \subset \mathsf{GL}(E)$ donc d'après le théorème d'inversion locale f induit un isomorphisme

$$\begin{aligned} f\colon a \in U_a &\longrightarrow f(a) \in V_{f(a)} \\ x &\longmapsto X \coloneqq f(x), \end{aligned}$$

et quitte à se restreindre à une boule centrée en $f(a)$ et incluse dans $V_{f(a)}$, on peut supposer $V_{f(a)}$ convexe. Comme $\mathrm{d}_X f^{-1} = (\mathrm{d}_x f)^{-1}$ est encore une isométrie, on a donc également $\|x-y\| = \|f^{-1}(X) - f^{-1}(Y)\| \leqslant \|X - Y\| = \|f(x) - f(y)\|$ pour tous $x, y \in U_a$.

Étape 2. Pour tous $x, y \in U_a$,

$$\langle f(x) - f(y), f(x) - f(y)\rangle = \langle x - y, x - y\rangle,$$

donc en différentiant par rapport à x,

$$\forall h \in E,\ \langle f(x) - f(y), \mathrm{d}_x f(h)\rangle = \langle h, x - y\rangle$$

puis, en différentiant par rapport à y,

$$\forall (h,k) \in E^2,\ \langle \mathrm{d}_x f(h), \mathrm{d}_y f(k)\rangle = \langle h, k\rangle.$$

D'où, puisque $\mathrm{d}_x f$ et $\mathrm{d}_y f$ sont des isométries,

$$\begin{aligned} \forall h \in E,\ \|\mathrm{d}_x f(h) - \mathrm{d}_y f(h)\|_2^2 &= \|\mathrm{d}_x f(h)\|_2^2 + \|\mathrm{d}_y f(h)\|_2^2 - 2\|h\|_2^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\mathrm{d}f$ est donc constante sur U_a.

Étape 3. Soit $A \coloneqq \{x \in E \mid \mathrm{d}_x f = \mathrm{d}_0 f\}$. A est fermé (image réciproque du fermé $\{\mathrm{d}_0 f\}$ de $\mathcal{L}_c(E)$ par l'application continue $\mathrm{d}f$), ouvert d'après la question précédente (pour tout $a \in A$, $a \in U_a \subset A$), et non vide ($0 \in A$). E étant connexe, on en déduit que $A = E$. Ainsi $\mathrm{d}f$ est constante, et $\mathrm{d}f - \mathrm{d}_0 f$ est nulle. Par l'inégalité des accroissements finis, $f - \mathrm{d}_0 f$ est constante égale à $(f - \mathrm{d}_0 f)(O) = f(O)$. Finalement $f(\overrightarrow{OM}) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$ pour tout $M \in E$, où $\overrightarrow{f} \coloneqq \mathrm{d}_0 f \in \mathsf{O}(E)$: f est une isométrie affine. ∎

Références. [Gou, p. 329]

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

[Gou] Xavier Gourdon : *Analyse.* 2ème édition.