

FIGURE 1 – Règles de résolution
(A atome; C, C' clauses)

Résolution binaire :	$\frac{\neg A \vee C \quad A \vee C'}{C \vee C'}$	$\frac{\forall \vec{x} (\neg A(s) \vee C) \quad \forall \vec{y} (A(t) \vee C')}{\forall \vec{z} (C \vee C')\mu} \quad \begin{array}{l} \mu = \text{mgu}(s, t) \\ \vec{x} \cap \vec{y} = \emptyset \\ \vec{z} = \text{Var}((C \vee C')\mu) \end{array}$
Factorisation binaire :	$\frac{A \vee A \vee C}{A \vee C}$	$\frac{\forall \vec{x} (A(s) \vee A(t) \vee C)}{\forall \vec{z} (A(t) \vee C)\mu} \quad \begin{array}{l} \sigma = \text{mgu}(s, t) \\ \vec{z} = \text{Var}((A(t) \vee C)\mu) \end{array}$
	(a) Calcul propositionnel $\vdash_{R_0}$.	(b) Logique du premier ordre $\vdash_{R_1}$.

On admet la complétude de la résolution propositionnelle.

Théorème 1 (Robinson). Soit S un ensemble de clauses universelles. Alors S est insatisfiable si et seulement si $S \vdash_{R_1}^* \perp$.

Lemme 2 (Correction). Soient S un ensemble de clauses universelles et φ une clause universelle. Alors

$$S \vdash_{R_1} \varphi \implies S \models \varphi.$$

Lemme 3 (Relèvement).

1. Soient C_1, C_2 des clauses universelles, $D_1 \in H(C_1)$, $D_2 \in H(C_2)$ telles que $D_1, D_2 \vdash_{R_0} D_3$ par résolution binaire. Alors il existe une clause universelle C_3 telle que $D_3 \in H(C_3)$ et $C_1, C_2 \vdash_{R_1} C_3$.
2. Soient C_1 une clause universelle, $D_1 \in H(C_1)$ telle que $D_1 \vdash_{R_0} D_2$ par factorisation binaire. Alors il existe une clause universelle C_2 telle que $D_2 \in H(C_2)$ et $C_1 \vdash_{R_1} C_2$.

Preuve.

1. Écrivons

$$\left. \begin{array}{l} C_1 := \forall \vec{x} (\neg A(s) \vee C) \\ C_2 := \forall \vec{y} (A(t) \vee C') \end{array} \right\} \quad \vec{x} \cap \vec{y} = \emptyset,$$

et

$$\begin{aligned} D_1 &:= (\neg A(s) \vee C)\sigma, & D_2 &:= (A(t) \vee C')\sigma, \\ D_3 &:= (C \vee C')\sigma. \end{aligned}$$

Comme $D_1, D_2 \vdash_{R_0} D_3$, s et t sont unifiables ($s\sigma = t\sigma$); soit alors $C_3 := \forall \vec{z} (C \vee C')\mu$ telle que $C_1, C_2 \vdash_{R_1} C_3$, avec $\mu = \text{mgu}(s, t)$. Par propriété du mgu il existe une substitution ν telle que $\sigma = \nu \circ \mu$. Alors $D_3 = ((C \vee C')\mu)\nu \in H(C_3)$.

2. Écrivons $C_1 := \forall \vec{x} (A(s) \vee A(t) \vee C)$, $D_1 := (A(s) \vee A(t) \vee C)\sigma$, $D_2 := (A(t) \vee C)\sigma$. Comme $D_1 \vdash_{R_0} D_2$, s et t sont unifiables ($s\sigma = t\sigma$). Soit $C_2 := \forall \vec{z} (A(t) \vee C)\mu$ telle que $C_1 \vdash_{R_1} C_2$, avec $\mu = \text{mgu}(s, t)$. Il existe alors ν telle que $\sigma = \nu \circ \mu$. D'où $D_2 = ((A(t) \vee C)\mu)\nu \in H(C_2)$. ■

Lemme 4. Soient S un ensemble de clauses universelles et D une clause close. Si $H(S) \vdash_{R_0}^* D$ alors il existe une clause universelle C telle que $D \in H(C)$ et $S \vdash_{R_1} C$.

Preuve. Par induction sur la structure de la preuve $H(S) \vdash_{R_1}^* D$.

1. Si $D \in H(S)$ alors il existe $C \in S$ tel que $D \in H(C)$ et, bien sûr, $S \vdash_{R_1}^0 C$.
2. On traite le cas où la dernière étape de la preuve est une résolution binaire : $D_1, D_2 \vdash_{R_0} D$. Par hypothèse d'induction il existe des clauses universelles C_1, C_2 telles que $D_1 \in H(C_1)$, $D_2 \in H(C_2)$, $S \vdash_{R_1}^* C_1$ et $S \vdash_{R_1}^* C_2$. Par le [lemme 3](#) il existe alors une clause universelle C telle que $D \in H(C)$ et $C_1, C_2 \vdash_{R_1} C$. D'où $S \vdash_{R_1}^* C$.
3. Le cas où la dernière étape de la preuve est une factorisation binaire est similaire. ■

Démonstration du théorème 1. Si $S \vdash_{R_1}^* \perp$ alors S est insatisfiable par le [lemme 2](#). Si S est insatisfiable, alors $H(S)$ est propositionnellement insatisfiable d'après le théorème de Herbrand. Par complétude de la résolution propositionnelle, on a donc $H(S) \vdash_{R_0}^* \perp$. D'où $S \vdash_{R_1}^* \perp$ par le [lemme 4](#). ■

Références. [Ste, p. 248] [DNR]

917 Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.

918 Systèmes formels de preuve en logique du premier ordre : exemples.

919 Unification : algorithmes et applications.

[DNR] René DAVID, Karim NOUR et Christophe RAFFALI : *Introduction à la logique : théorie de la démonstration*.

[Ste] Jacques STERN : *Fondements mathématiques de l'informatique*.