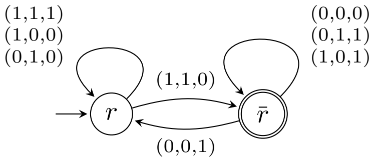
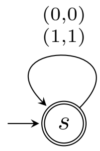
Théorème 1. L'arithmétique de Presburger $T \coloneqq \mathrm{Th}(\mathbf{N}, 0, 1, +, =)$ est décidable.

Démonstration. Soit φ une formule du premier ordre sur le langage $\{0, 1, +, =\}$. Posons $\Sigma \coloneqq \{0, 1\}$ et notons $x_1, \ldots, x_n$ les variables libres apparaissant dans φ : $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. À tout mot $w \coloneqq (w_1, \ldots, w_n) \in (\Sigma^n)^\star$ on associe le n-uplet $\overline{w} \coloneqq (\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_n) \in \mathbf{N}^n$ tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, w_i est une représentation binaire de $\overline{w}_i$ avec le bit de poids faible à droite. Nous procédons par induction sur φ pour montrer que le langage $L(\varphi) \coloneqq \{w \mid T, \{x_i \mapsto \overline{w}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \vDash \varphi\}$ est régulier.

1. <u>φ est une formule atomique</u>, c'est-à-dire $\varphi \coloneqq x_i + x_j = x_k$ ou $\varphi \coloneqq x_i = x_j$. Les automates ci-dessous reconnaissent l'addition et l'égalité binaires :



(a) $x_i + x_j = x_k$,



(b) $x_i = x_j$.

2. <u>φ est une négation, une conjonction ou une disjonction.</u> L'effectivité de la clôture des langages réguliers par opérations booléennes permet de construire un automate reconnaissant $L(\varphi)$.
3. <u>$\varphi \coloneqq \exists x\ \psi(x)$.</u> Soit $\mathcal{A}_\psi \coloneqq (\Sigma^{n+1}, Q, \delta, I, F)$ reconnaissant $L(\psi)$, avec $x_1, \ldots, x_n,\ x_{n+1} = x$ les variables libres de ψ. Soit π la projection de Σ^{n+1} sur Σ^n. Nous construisons alors l'automate $\mathcal{A}_\varphi \coloneqq (\Sigma^n, Q \uplus \{d\}, \delta', d, F)$ de la façon suivante : soit A l'ensemble des états de $\mathcal{A}_\psi$ accessibles depuis un état initial avec des transitions étiquetées dans $[0^n(0+1)]^\star$. On pose
$$\delta' \coloneqq (\{d\} \times \{\varepsilon\} \times A) \cup \{(p, \pi(w), q) \mid (p, w, q) \in \delta\}.$$
Si $T, \{x_i \mapsto \overline{w}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \vDash \varphi$ alors il existe $w_{n+1} \in \Sigma^*$ tel que $T, \{x_i \mapsto \overline{w}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \vDash \psi$, ce qui signifie que $w \coloneqq (w_1, \ldots, w_k, w_{n+1}) \in L(\psi)$ par hypothèse d'induction : $I \ni i \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}_\psi} f \in F$, alors $d \xrightarrow{\varepsilon}_{\mathcal{A}_\varphi} i \xrightarrow{\pi(w)}_{\mathcal{A}_\varphi} f$, donc $\mathcal{A}_\varphi$ reconnaît $(w_1, \ldots, w_n)$. Réciproquement si $\mathcal{A}_\varphi$ reconnaît $(w_1, \ldots, w_n)$: $d \xrightarrow{\varepsilon}_{\mathcal{A}_\varphi} p \xrightarrow{\pi(w)}_{\mathcal{A}_\varphi} f \in F$ avec $p \in A$, donc $I \ni i \xrightarrow{v}_{\mathcal{A}_\psi} p \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}_\psi} f$ où $v \coloneqq (v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ est tel que $v_1, \ldots, v_n \in 0^*$. Par hypothèse d'induction $T, \{x_i \mapsto \overline{vw}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \vDash \psi$, donc $T, \{x_i \mapsto \overline{w}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \vDash \varphi$ (puisque pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\overline{vw}_i = \overline{w}_i$). Ainsi $\mathcal{A}_\varphi$ reconnaît $L(\varphi)$.
4. <u>$\varphi \coloneqq \forall x\ \psi(x)$.</u> Il suffit d'écrire $\varphi = \neg(\exists x\ \neg\psi(x))$ et on conclut grâce aux deux points précédents. ∎

Références. [Car, Sip]

909 Langages rationnels. Exemples et applications.

914 Décidabilité et indécidabilité. Exemples.

917 Logique du premier ordre : syntaxe et sémantique.

922 Ensembles récursifs, récursivement énumérables. Exemples.

924 Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

[Car] Olivier Carton : *Langages formels, calculabilité et complexité.*

[Sip] Michael Sipser : *Introduction to the Theory of Computation.*