Rappels et notations. Soit $\mathcal{C}_{2\pi} \subset \mathrm{L}^1_{2\pi}$ l'espace des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on note $S_n(f;x) \coloneqq \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$ la n-ième somme partielle de sa série de Fourier en $x \in \mathbf{R}$ et $S^*(f;x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbf{N}} |S_n(f)(x)| \in [0,+\infty]$.

On rappelle que pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $c_k(f)e_k \coloneqq e_k \star f = (\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t)e_k$ où $e_k \colon t \in \mathbf{R} \mapsto e^{ikt}$, $k \in \mathbf{Z}$, est la suite des monômes trigonométriques. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $S_n(f) = D_n \star f$ où $D_n \coloneqq \sum_{k=-n}^{n} e_k$ est le noyau de Dirichlet.

Théorème 1 ([Rud, p. 130])**.** Il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense $E \subset \mathcal{C}_{2\pi}$ tel que pour tout $f \in E$, $S^*(f;0) = +\infty$.

Proposition 2 (Théorème de Banach–Steinhaus)**.** Soient E un espace de Banach, F un evn et $(f_i) \in \mathcal{L}_c(E,F)^I$ une suite d'applications linéaires continues telle que

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| = +\infty.$$

Alors il existe un $\mathcal{G}_\delta$ dense Ω tel que

$$\forall x \in \Omega,\ \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| = +\infty.$$

Preuve. On considère les fermés $A_n \coloneqq \bigcap_{i\in I} \|T_i\|^{-1}\langle[0,n]\rangle$ où $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons que A_n n'est pas d'intérieur vide. Il existe donc une boule $\mathrm{B}(x_0,r) \subseteq A_n$ telle que $\forall x \in \mathrm{B}(x_0,r),\ \forall i \in I,\ \|T_i(x)\| \leqslant n$. Si $x \in \mathrm{B}(0,1)$, alors

$$\|T_i(x)\| \leqslant \frac{\|T_i(x_0+rx)\| + \|T_i(x_0)\|}{r} \leqslant \frac{2n}{r}$$

uniformément pour $i \in I$. D'où $\sup_{i\in I} \|T_i\| < +\infty$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Nécessairement tous les A_n sont des fermés d'intérieur vide, c'est-à-dire que leurs complémentaires sont des ouverts denses, d'intersection Ω dense par le lemme de Baire. Soient $x \in \Omega$ et $n \in \mathbf{N}$. Nous avons $x \in {A_n}^{\complement}$, et donc l'existence d'un $i \in I$ tel que $\|T_i(x)\| > n$. D'où $\sup_i \|T_i(x)\| > n$, et ceci pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc $\sup_i \|T_i(x)\| = +\infty$ pour tout $x \in \Omega$. ∎

Lemme 3. $D_n(t) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}$ pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $t \in]0,\pi[$, et $\log n = O(\|D_n\|_1)$ lorsque $n \to +\infty$.

Preuve. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $t \in]0,\pi[$. Alors $e^{it} \neq 1$ et

$$D_n(t) \coloneqq \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{(e^{it})^{n+1} - (e^{it})^{-n}}{e^{it}-1} = \frac{(e^{it})^{n+1/2} - (e^{it})^{-(n+1/2)}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}.$$

Ainsi, en notant que $D_n(t) = D_n(-t)$,

$$\begin{aligned}
\|D_n\|_1 &\coloneqq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |D_n(t)|\mathrm{d}t \\
&\geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{|\sin((n+1/2)t)|}{t}\mathrm{d}t && (\forall u > 0,\ |\sin(u)| \leqslant u) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac12)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\mathrm{d}x && (x \leftarrow (n+1/2)t) \\
&\geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(x)|\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\
&\sim \frac{4}{\pi^2}\log(n) \quad \text{lorsque } n \to +\infty.
\end{aligned}$$

∎

Démonstration du théorème 1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la forme linéaire $\Lambda_n \colon f \in \mathcal{C}_{2\pi} \mapsto S_n(f;0)$ est continue sur l'espace de Banach $\mathcal{C}_{2\pi}$. En effet

$$|\Lambda_n(f)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \|D_n\|_1\|f\|_\infty,$$

ce qui prouve aussi que $|||\Lambda_n||| \leqslant \|D_n\|_1$. Montrons que $|||\Lambda_n||| = \|D_n\|_1$. Soient $d_n \coloneqq \operatorname{sign}(D_n)$ et $d_{n,k} \coloneqq \frac{D_n}{|D_n|+2^{-k}}$, $k \in \mathbf{N}$. Alors $d_{n,k} \in \mathcal{C}_{2\pi}$ tend simplement vers d_n lorsque $k \to +\infty$, et est dominée sur $[-\pi, \pi]$ par la constante 1, donc d'après le théorème de convergence dominée

$$\Lambda_n(d_{n,k}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d_{n,k}(t)D_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d_n(t)D_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t = \|D_n\|_1.$$

D'où $|||\Lambda_n||| = \|D_n\|_1$. Grâce au lemme 3 $\sup_{n\in\mathbf{N}^*} |||\Lambda_n||| = +\infty$. En appliquant la proposition 2 il existe alors un $\mathcal{G}_\delta$ dense $E \subset \mathcal{C}_{2\pi}$ tel que $\sup_{n\in\mathbf{N}} |S_n(f;0)| = \sup_{n\in\mathbf{N}} |\Lambda_n(f)| = +\infty$ pour tout $f \in E$. ■

Références. [Rud, p. 130] [Gou]

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

[Gou] Xavier Gourdon : *Analyse*. 2ème édition.

[Rud] Walter Rudin : *Analyse réelle et complexe*. 3ème édition.