Proposition 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ telle que $u_n = O(\frac{1}{n})$ lorsque $n \to +\infty$. On suppose que la série Σu_n converge au sens de Cesàro. Soit $\ell \in \mathbf{C}$ sa Cesàro-somme. Alors Σu_n converge et sa somme vaut ℓ.

Preuve.

1. Traduction des hypothèses. Notons $s_n \coloneqq u_0 + \cdots + u_n$, $n \in \mathbf{N}$, la suite des sommes partielles de (u_n). Nous avons

$$\sigma_n \coloneqq \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell,$$

et l'existence de $A > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|nu_n| \leqslant A$.

2. Introduction de la « moyenne décalée ». Soient $n, k \geqslant 1$.

D'une part,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{k}\sum_{i=n+1}^{n+k} s_i - s_n\right| &= \frac{1}{k}\left|\sum_{i=n+1}^{n+k}(s_i - s_n)\right| \\
&= \frac{1}{k}\left|\sum_{i=n+1}^{n+k}(u_{n+1} + \cdots + u_i)\right| \\
&= \frac{1}{k}\left|\sum_{i=n+1}^{n+k}(n+k+1-i)u_i\right| \\
&\leqslant \sum_{i=n+1}^{n+k} \underbrace{\frac{n+k+1-i}{k}}_{\leqslant 1} \underbrace{|u_i|}_{\leqslant A/i} \\
&\leqslant A \sum_{i=n+1}^{n+k} \int_{i-1}^{i} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= A \int_n^{n+k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= A \log\left(1 + \frac{k}{n}\right) \\
&\leqslant A\,\frac{k}{n}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=n+1}^{n+k} s_i &= (n+k+1)\sigma_{n+k} - (n+1)\sigma_n \\
&= (n+1)(\sigma_{n+k} - \sigma_n) + k\sigma_{n+k},
\end{aligned}$$

donc

$$\ell - \frac{1}{k}\sum_{i=n+1}^{n+k} s_i = \frac{n+1}{k}(\sigma_n - \sigma_{n+k}) + (\ell - \sigma_{n+k}).$$

3. Conclusion. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $k \coloneqq k_n \coloneqq \lceil \varepsilon n \rceil \sim \varepsilon n$. Par inégalité triangulaire

$$|\ell - s_n| \leqslant A\,\frac{k_n}{n} + \frac{n+1}{k_n}|\sigma_n - \sigma_{n+k_n}| + |\ell - \sigma_{n+k_n}|, \qquad (\star)$$

donc $\limsup |\ell - s_n| \leqslant A\varepsilon$, et ceci quel que soit $\varepsilon > 0$. Σu_n est donc convergente, de somme ℓ. ■

Corollaire 2. Lorsque $u_n = O(\frac{1}{n})$, Σu_n est convergente si et seulement si Σu_n est Cesàro-convergente, et dans ce cas somme et Cesàro-somme coïncident.

Application 3 (Convergence ponctuelle des séries Fourier)**.** Soit $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$. On suppose que sa suite des coefficients de Fourier $(c_n(f))_{n\in\mathbf{Z}}$ vérifie $c_n = O(\frac{1}{|n|})$ lorsque $|n| \to +\infty$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $f(x^-)$ et $f(x^+)$ existent,

$$S_n(f;x) \coloneqq \sum_{k=-n}^{n} c_n(f)e^{ikx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Preuve. Comme le terme général de la série de Fourier de f en x vérifie les hypothèses de la proposition 1, il suffit de montrer que sa moyenne de Cesàro converge vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$. Or la moyenne de Cesàro de $S_n(f;x)$ est précisément la série de Fejér $\sigma_n(f;x)$ de f en x. On sait que $\sigma_n(f;x) \coloneqq K_n \star f(x)$ où le noyau de Fejér K_n est une unité approchée paire forte sur $[-\pi,\pi]$: $K_n \geqslant 0$, $\|K_n\|_1 = 1$ et pour tout $0 < \delta < \pi$, $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$. Nous avons

$$2\sigma_n(f;x) \coloneqq 2K_n \star f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))K_n(t)\mathrm{d}t,$$

donc pour tout $0<\delta<\pi$,

$$\begin{aligned}\left|\sigma_n(f;x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\right| K_n(t)\mathrm{d}t \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\delta}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\right| K_n(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme $\|K_n\|_1 = 1$, le deuxième terme est un $o(1)$ lorsque $\delta \to 0$ (uniformément en n). Comme $f \in \mathrm{L}^1_{2\pi}$, le premier terme est un $O(\|K_{n|[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]}\|_\infty)$ qui est petit pour n assez grand. D'où la convergence ponctuelle de la série de Fejér. ∎

Remarque 4. En observant ($\star$) on voit que si $c_n(f) = O(\frac{1}{|n|})$ ($|n| \to +\infty$) et si la série de Fejér converge uniformément, alors il en est de même de la série de Fourier.

Références. [BMP, Com]

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

[BMP] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré : *Objectif Agrégation.* 2ème édition.

[Com] Jean Combes : *Suites et séries.*