Théorème 1 (Méthode de Laplace)**.**
Soient $f\colon [a,b[\to \mathbf{R}$ et $\varphi \in \mathcal{C}^n([a,b[,\mathbf{R})$ $(n \geqslant 1)$ telles que :

(i) f est continue en a et $f(a) \neq 0$;

(ii) φ admet en a un minimum global strict, $\varphi(b^-) > \varphi(a)$, $\varphi^{(i)}(a) = 0$ pour tout $1 \leqslant i < n$ et $\varphi^{(n)}(a) > 0$;

(iii) il existe $t_0 > 0$ tel que $x \mapsto e^{-t\varphi(x)} f(x)$ est Lebesgue-intégrable pour tout $t \geqslant t_0$.

Alors, en notant Γ la fonction Gamma d'Euler,

$$I(t) \coloneqq \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x \underset{x\to a}{\sim} \frac{\Gamma(1/n)}{n} f(a) \sqrt[n]{\frac{n!}{\varphi^{(n)}(a)t}} e^{-\varphi(a)t}.$$

Application 2 (Formule de Stirling)**.** $\Gamma(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} t^{t+1/2} e^{-t}$.

Preuve du théorème 1. On peut supposer $\varphi(a) = 0$ quitte à considérer $\varphi - \varphi(a)$.

Étape 1. On prouve le lemme suivant : si $g\colon [0,\beta] \to \mathbf{R}$ est bornée et continue en 0, alors

$$\sqrt[n]{t} \int_0^\beta e^{-tx^n} g(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{\Gamma(1/n)}{n} g(0).$$

Soit en effet $M > 0$ tel que $|g(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in [0,\beta]$. Grâce au changement de variable affine $x \mapsto u = t \cdot x^n$,

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{t} \int_0^\beta e^{-tx^n} g(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{n} \int_0^{t\beta^n} e^{-u} u^{-1+1/n} g\big((u/t)^{1/n}\big)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{-1+1/n} g\big((u/t)^{1/n}\big) \mathbb{1}_{[0,t\beta^n]}(u)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

La dernière intégrande est dominée par le chapeau intégrable $Me^{-u}u^{-1+1/n}$ pour tous $u \in]0,+\infty[$ et $t > 0$, et converge point par point vers $e^{-u}u^{-1+1/n}g(0)$ lorsque $t \to +\infty$ (car g est continue en 0), donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{t\to+\infty} \sqrt[n]{t} \int_0^\beta e^{-tx^n} g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{-1+1/n} g(0)\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(1/n)}{n} g(0).$$

Étape 2. On procède à quelques estimations et découpages. Comme $\varphi(b^-) > \varphi(a) = 0$, il existe $a < b' < b$ et $m' > 0$ tels que $\varphi(x) \geqslant m'$ pour tout $x \in [b', b[$. Par hypothèse, $\varphi^{(i)}(a) = 0$ pour tout $1 \leqslant i < n$ et $\varphi^{(n)}(a) > 0$, donc d'après la formule de Taylor–Young,

$$\varphi'(x) \underset{x\to a}{\sim} \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n)}(a) > 0. \qquad (\star)$$

Comme de plus f est continue en a donc bornée au voisinage, il existe alors $a < c < b'$ tel que φ est strictement croissante sur $[a,c]$ et f est bornée sur $[a,c]$. Enfin, puisque φ est continue et à valeurs strictement positives sur le compact $[c,b']$, on en déduit l'existence de $0 < m < m'$ tel que $\varphi(x) \geqslant m$ pour tout $x \in [c,b[$.

Étape 3. Pour tout $t \geqslant t_0$, d'après la relation de Chasles,

$$I(t) = \int_a^c e^{-t\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Nous devons montrer que $$\sqrt[n]{t} \cdot I(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{\Gamma(1/n)}{n} f(a) \sqrt[n]{\frac{n!}{\varphi^{(n)}(a)}}.$$

D'une part,
$$\begin{aligned}\sqrt[n]{t} \left| \int_c^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x \right| &\leqslant \sqrt[n]{t} \int_c^b e^{-(t-t_0)\varphi(x)} e^{-t_0\varphi(x)} |f(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant e^{-m(t-t_0)} \sqrt[n]{t} \int_a^b e^{-t_0 x^n} |f(x)|\mathrm{d}x \\ &\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

D'autre part, l'application $u\colon x \mapsto u(x) = \sqrt[n]{\varphi(x)}$ est strictement croissante sur $[a,c]$, et aussi $\mathcal{C}^1$ car $\varphi^{(i)}(a) = 0$ pour tout $1 \leqslant i < n$. En effet, toujours d'après la formule de Taylor-Young,

$$u(x) \underset{x\to a}{\sim} (x-a)\sqrt[n]{\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}},$$

donc
$$\frac{u(x)-u(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \sqrt[n]{\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}},$$

et
$$u'(x) = \frac{1}{n}\varphi'(x)u(x)^{1-n} \underset{x\to a}{\sim} \sqrt[n]{\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}} = u'(a) \quad \text{(grâce à } (\star)\text{)}.$$

Soient $\beta \coloneqq u(c) > 0$ et $x\colon u \in [0,\beta] \mapsto x(u) \in [a,c]$ le difféomorphisme inverse de u. Nous avons

$$\sqrt[n]{t}\int_a^c e^{-t\varphi(x)}f(x)\mathrm{d}x = \sqrt[n]{t}\int_0^\beta e^{-tu^n}g(u)\mathrm{d}u,$$

où $g\colon u \mapsto f(x(u))x'(u)$ est bornée sur $[0,\beta]$ et continue en 0, avec $g(0) = f(a)u'(a)^{-1} = f(a)\sqrt[n]{\frac{n!}{\varphi^{(n)}(a)}}$, donc d'après le lemme,

$$\sqrt[n]{t}\int_a^c e^{-t\varphi(x)}f(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{\Gamma(1/n)}{n}f(a)\sqrt[n]{\frac{n!}{\varphi^{(n)}(a)}}. \qquad \blacksquare$$

Preuve de l'application 2. Pour tout $t > 0$ nous avons

$$\Gamma(t+1) \coloneqq \int_0^{+\infty} u^t e^{-u}\mathrm{d}u,$$

soit par le changement de variable affine $u = tx$,

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty}(tx)^t e^{-tx}t\mathrm{d}x = t^{t+1}\int_0^{+\infty} e^{-t(x-\log x)}\mathrm{d}x.$$

La fonction $\varphi\colon x \mapsto x - \log(x)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$: $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{u}$, $\varphi''(x) = \frac{1}{u^2}$. D'où $\varphi'(x) < 0$ sur $]0,1[$, $\varphi'(x) > 0$ sur $]1,+\infty[$, $\varphi'(1) = 0$ et $\varphi''(1) = 1 > 0$, de sorte que le théorème 1 (cas $n = 2$) s'applique (deux fois) : sur $[-1,0[$ (avec $x \mapsto \varphi(-x)$) et sur $[1,+\infty[$ (avec φ). Comme $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ on en déduit

$$\Gamma(t+1) = t^{t+1}\int_{-1}^0 e^{-t\varphi(-x)}\mathrm{d}x + t^{t+1}\int_1^{+\infty} e^{-t\varphi(x)}\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}t^{t+1/2}e^{-t}. \qquad \blacksquare$$

Références. [Far, Rou]

218 Applications des formules de TAYLOR.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

[Far] Jacques FARAUT : *Calcul intégral.*

[Rou] François ROUVIÈRE : *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.* 3ème édition.