

Théorème 1. Soit $\mathcal{A} := \langle Q, \Sigma, \delta, I, F \rangle$ un automate fini co-déterministe et co-accessible. Alors l'automate déterminisé $\mathcal{A}_{\text{det}}$ de $\mathcal{A}$ est minimal.

Démonstration. Notons L le langage reconnu et, pour $P \subseteq Q$, $L_P := \bigcup_{p \in P} L_p$. Soient $P \neq P'$ deux parties (états) accessibles de $\mathcal{A}_{\text{det}}$ telles que $L_P = L_{P'}$. Montrons que $P = P'$. Soit $p \in P$. Par co-accessibilité il existe $w \in L_p, q_f \in F$ tels que $p \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} q_f$. Par co-déterminisme q_f est unique, et si $p' \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} q_f$ alors $p' = p$. Mais $w \in L_P = L_{P'}$ donc il existe $p' \in P'$ tel que $w \in L_{p'}$, c'est-à-dire $p' \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} q_f$ dans $\mathcal{A}$. D'où $P' \ni p' = p$. Par symétrie on a l'autre inclusion $P' \subseteq P$, donc $P = P'$. ■

Algorithme 2. Si $\mathcal{A}$ est un automate fini alors $(^t(^t\mathcal{A})_{\text{det}})_{\text{det}}$ est l'automate minimal reconnaissant $L(\mathcal{A})$. Cet algorithme, a priori doublement exponentiel, opère en fait en temps $O(2^n)$ (n étant le nombre d'états de $\mathcal{A}$) car l'automate minimal a toujours au plus 2^n états.

Proposition 3. Soit $\mathcal{A}$ l'automate déterminisé de l'automate de la figure 1. Alors cet automate est minimal. De plus $\mathcal{A}$ a 2^n états.

Preuve. Comme l'automate de la figure 1 est co-déterministe et co-accessible, $\mathcal{A}$ est minimal d'après le théorème 1. Montrons par récurrence sur la taille de $P \subseteq \{1, \dots, n\}$ la propriété

$$\mathcal{H}_P: P \cup \{0\} \text{ est accessible depuis l'état initial } \{0\} \text{ de } \mathcal{A}.$$

Si $|P| = 0$ il n'y a rien à montrer. Soit $0 \leq k < n$. Supposons $\mathcal{H}_P$ lorsque $|P| \leq k$ et fixons $P \subseteq \{1, \dots, n\}$ tel que $|P| = k + 1$. Posons aussi $X - 1 := \{i - 1 \mid i \in X \setminus \{1\}\}$ pour tout $X \subseteq \{1, \dots, n\}$.

- Si $1 \in P$ alors $|P - 1| = k$, donc $(P - 1) \cup \{0\}$ est accessible d'après $\mathcal{H}_{P-1}$. Comme $(P - 1) \cup \{0\} \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} P \cup \{0\}$ dans $\mathcal{A}$, est alors accessible dans $\mathcal{A}$.
- Si $1 \notin P$, soit $j := \min P \geq 2$. On montre que $P \cup \{0\}$ est accessible par récurrence sur j . Si $j = 2$ alors $|(P - 1) - 1| = k$, donc $((P - 1) - 1) \cup \{0\}$ est accessible d'après $\mathcal{H}_{(P-1)-1}$. Or

$$((P - 1) - 1) \cup \{0\} \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} (P - 1) \cup \{0\} \xrightarrow{b}_{\mathcal{A}} P \cup \{0\}.$$

Si $j > 2$ alors $j - 1 = \min[P - 1]$, donc $(P - 1) \cup \{0\}$ est accessible par hypothèse de récurrence. Comme $(P - 1) \cup \{0\} \xrightarrow{b}_{\mathcal{A}} P \cup \{0\}$ dans $\mathcal{A}$, $P \cup \{0\}$ est alors accessible dans $\mathcal{A}$.

D'où $\mathcal{H}_P$. Ceci montre que $\mathcal{A}$ possède déjà les 2^n états $P \cup \{0\}$, $P \subseteq \{1, \dots, n\}$. Comme tout état accessible de $\mathcal{A}$ doit contenir 0, ce sont tous les états de $\mathcal{A}$. ■

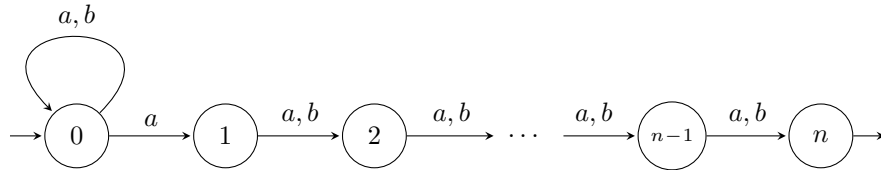


FIGURE 1 – Automate co-déterministe co-accessible reconnaissant $\Sigma^* a \Sigma^{n-1}$.

Références. [Sak]

909 Langages rationnels. Exemples et applications.

[Sak] Jacques SAKAROVITCH : *Éléments de théorie des automates*.