Théorème 1 (Markov–Kakutani)**.** Soient E un evn, K un compact convexe non vide de E et $F \subseteq \mathcal{L}_c(E)$ un ensemble d'applications linéaires continues commutant deux à deux et laissant K stable. Alors

$$\exists x \in K,\ \forall f \in F,\ f(x) = x.$$

Preuve. On raisonne d'abord dans les cas particuliers où F est un singleton puis un ensemble fini.

1. Le cas $F = \{f\}$**.** Fixons $x \in K$. Soit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n(x) \coloneqq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) \in K$ l'isobarycentre des n points $f^k(x)$, $0 \leqslant k < n$, du convexe K. D'une part

$$\|f(u_n(x)) - u_n(x)\| = \frac{1}{n}\|f^n(x) - x\| \leqslant \frac{\delta(K)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'autre part on peut extraire de $(u_n(x))_{n\in\mathbf{N}} \in K^{\mathbf{N}}$ une sous-suite $(u_{\sigma(n)}(x))_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers un élément $u \in K$. Par continuité de f en u, on en déduit $f(u) - u = 0$, c'est-à-dire $f(u) = u$.

2. Le cas $F = \{f_1, \dots, f_n\}$**.** Procédons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$. On vient de traiter le cas $n = 1$. Supposons $n \geqslant 2$ et le résultat vrai au rang $n-1$. L'ensemble $K' \coloneqq \{x \in K \mid \forall i < n,\ f_i(x) = x\}$ est encore convexe, et compact car fermé dans K. Aussi, par hypothèse de récurrence, $K' \neq \varnothing$. Enfin, K' est stable par f_n. En effet si $x \in K'$ et $i \in \{1, \dots, n-1\}$, alors $x = f_i(x)$, donc $f_n(x) = f_n(f_i(x)) = f_i(f_n(x))$ puisque f_n et f_i commutent — $f_n(x) \in K$ est alors un point fixe commun à $f_1, \dots, f_{n-1}$, soit $f_n(x) \in K'$. D'après le premier cas, f_n admet alors un point fixe dans K', ce qui achève la récurrence.

3. Le Kakutani (hahaha)**.** Pour tout $f \in F$, $K_f \coloneqq \{x \in K \mid f(x) = x\}$ est un fermé de K. D'après le deuxième cas, $\bigcap_{f\in F'} K_f \neq \varnothing$ pour tout sous-ensemble fini $F' \subset F$, donc grâce à la propriété de Borel–Lebesgue $\bigcap_{f\in F} K_f \neq \varnothing$. ∎

Corollaire 2. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice stochastique. Alors P possède une mesure invariante.

Preuve. L'application linéaire (donc) continue $f\colon \mu \in \mathbf{R}^n \mapsto \mu P \in \mathbf{R}^n$ stabilise, puisque P est une matrice stochastique, l'ensemble $K \coloneqq \{\mu \coloneqq (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbf{R}^n \mid \forall i,\ \mu_i \geqslant 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n \mu_i = 1\}$, compact (fermé borné de $\mathbf{R}^n$), convexe, et non vide (par exemple $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \in K$). D'après le théorème 1 f admet donc un point fixe dans K : il existe $\mu \in K$ tel que $f(\mu) = \mu P = \mu$. ∎

Références. [MT]

203 Utilisation de la notion de compacité.

206 Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

[MT] Rached Mneimné et Frédéric Testard : *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.*