

Soit $E := \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Pour $\tau \in \mathbf{R}$, on définit l'endomorphisme de translation $\tau \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\begin{aligned}\tau: E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto \tau f := f_\tau: x \in \mathbf{R} \longmapsto f(x + \tau).\end{aligned}$$

Théorème 1. Soit F un sev de E de dimension finie $n \in \mathbf{N}$. Alors F est stable par les translations si et seulement si F est l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à coefficients constants.

Lemme 2. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ libre dans E . Alors il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ tels que $\det (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$.

Preuve. Soient $F := \text{Vect}\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ et $F' := \text{Vect}\langle \delta_x: f \in F \mapsto f(x) \rangle_{x \in \mathbf{R}} \subset F^*$. On a ${}^\perp F' = \{0_F\}$, donc $F' = ({}^\perp F')^\perp = \{0_F\}^\perp = F^*$. Il existe donc $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ tels que $(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n})$ est une base de F^* . Soient $(g_1, \dots, g_n) \in F^n$ sa base antéduale et A la matrice de passage de $(f_1, \dots, f_n)$ à $(g_1, \dots, g_n)$. On a

$$f_i(x_j) = \delta_{x_j} f_i = \delta_{x_j} \sum_{k=1}^n a_{ik} g_k = \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{x_j}(g_k) = a_{ij},$$

donc $\det (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} = \det A \neq 0$. ■

Démonstration du théorème 1. Supposons que F est stable par les translations. Soient $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F et fixons $f \in F$. Comme $f_\tau \in F$ pour tout τ , il existe des fonctions $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}^{\mathbf{R}}$ telles que

$$\forall \tau \in \mathbf{R}, f_\tau = \sum_{i=1}^n a_i(\tau) f_i. \quad (\star)$$

D'après le [lemme 2](#) il existe aussi $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ tels que $A = (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est inversible.

Régularité des coefficients. Soit $(\rho_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'unités approchées. Puisque les fonctions que nous considérons sont continues donc localement intégrables, leurs convolutions avec ρ_k , $k \in \mathbf{N}$, sont bien définies et $\mathcal{C}^\infty$. Aussi, la convolution est linéaire et commute avec la translation, donc $(\rho_k \star f)_\tau = \sum_{i=1}^n a_i(\tau) (\rho_k \star f_i)$. Soit pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A_k := (\rho_k \star f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$. Comme $(\rho_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une identité approchée, A_k tend vers A , donc par continuité du déterminant il existe $k \in \mathbf{N}$ assez grand tel que $\det A_k \neq 0$. Pour tout $\tau \in \mathbf{R}$, on a $[(\rho_k \star f)(x_1 - \tau) \dots (\rho_k \star f)(x_n - \tau)] = [a_1(\tau) \dots a_n(\tau)] A_k$ donc, avec $A_k^{-1} := (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$,

$$\forall j = 1, \dots, n, \forall \tau \in \mathbf{R}, a_j(\tau) = \sum_{i=1}^n b_{ij} (\rho_k \star f)(x_i + \tau),$$

et les fonctions $a_j: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, $1 \leq j \leq n$, sont donc $\mathcal{C}^\infty$.

Stabilité par dérivation. En évaluant f_τ en 0 dans $(\star)$ on en déduit que f est $\mathcal{C}^\infty$. Dérivons $(\star)$ par rapport à $\tau: (f')_\tau = (f_\tau)' = \sum_{i=1}^n a'_i(\tau) f_i$, et finalement $f' = \sum_{i=1}^n a'_i(0) f_i$. F est donc stable par l'endomorphisme de dérivation $D \in \mathcal{L}(E)$. Soit μ le polynôme minimal de $D|_F$ et d son degré. On a $F \subset \text{Ker } \mu(D)$ où $\text{Ker } \mu(D)$ est de dimension d d'après le théorème de Cauchy–Lipschitz linéaire, donc $n \leq d$. Mais $d \leq n$ (d'après le théorème de Cayley–Hamilton), donc $d = n$ puis $F = \text{Ker } \mu_D$.

Le sens réciproque est immédiat car les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n à coefficients constants sont clairement stables par les translations. ■

Références. [\[BMP, Lei\]](#)

152 Déterminant. Exemples et applications.

159 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

240 Produit de convolution, transformation de FOURIER. Applications.

[BMP] Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ : *Objectif Agrégation*. 2^{ème} édition.

[Lei] Éric LEICHTNAM : *Exercices corrigés de mathématiques posés à l'oral des concours de Polytechnique et des ENS. Analyse*.