Théorème 1. Soit $\Sigma u_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que sa somme $f(x)$ tend vers ℓ lorsque $x \to 1^-$ (convergence au sens d'Abel). On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est réelle et que $\forall n \in \mathbf{N},\ nu_n \leqslant A$ pour un certain $A \in \mathbf{R}$. Alors Σu_n est CV (de somme ℓ).

Démonstration.

1. **Heuristique.** Soit $\chi := \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$. Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, $x := 2^{-\frac{1}{N}}$ vérifie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\chi(x^n) = \sum_{n=0}^{N} u_n$. Nous allons donc estimer la somme partielle $\sum_{n=0}^{N} u_n$ (pour N grand) à l'aide d'un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\chi(x^n) - \ell$ lorsque $x \to 1^-$. Il nous suffira d'encadrer χ entre deux fonctions polynomiales.
Soit $\psi(x) := \frac{-1}{1-x}$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $\psi(x) := \frac{1}{x}$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Si p_i, q_i $(i = 1, 2)$ sont deux fonctions polynomiales telles que
$$p_i(x) = x + x(1-x)q_i(x) \quad \text{pour tout } x \in [0,1],$$
alors (en considérant séparément $[0, \frac{1}{2}[$ et $[\frac{1}{2}, 1]$) $p_1 \leqslant \chi \iff q_1 \leqslant \psi$ et $\chi \leqslant p_2 \iff \psi \leqslant q_2$. Aussi, $p_1(0) = p_2(0) = 0$, $p_1(1) = p_2(1) = 1$. On va obtenir une approximation de χ à partir d'une approximation de ψ. Fixons $\varepsilon > 0$.
2. **Approximations polynomiales.** On construit d'abord (voir figure 1) deux fonctions $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}([0,1])$ telles que $\psi_1 \leqslant \psi \leqslant \psi_2$ et $0 \leqslant \int_0^1 (\psi_2(x) - \psi_1(x))\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon/2$. Puisque ψ_1 et ψ_2 sont continues, il existe d'après le théorème de Weierstraß deux fonctions polynomiales $q_1, q_2 \colon [0,1] \to \mathbf{R}$ telles que $\|q_1 - (\psi_1 - \varepsilon/4)\|_\infty \leqslant \varepsilon/8$ et $\|(\psi_2 + \varepsilon/4) - q_2\|_\infty \leqslant \varepsilon/8$, en particulier $\psi_1 - \varepsilon/4 \leqslant q_1 \leqslant \psi_1$ et $\psi_2 \leqslant q_2 \leqslant \psi_2 + \varepsilon/4$. D'où $q_1 \leqslant \psi_1 \leqslant \psi \leqslant \psi_2 \leqslant q_2$ et en écrivant $q_2 - q_1 = (q_2 - \psi_2) + (\psi_2 - \psi_1) + (\psi_1 - q_1)$ on en déduit que
$$\int_0^1 (q_2(x) - q_1(x))\mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$
3. **Estimation de l'approximation.** Montrons que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n p_i(x^n) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \ell\, p_i(1) = \ell \quad \text{et} \quad (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} q_i(x^n)x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} \int_0^1 q_i(t)\mathrm{d}t.$$
Par linéarité il suffit de vérifier cela dans les cas où $p_i \colon x \mapsto x^{k+1}$ et $q_i \colon x \mapsto x^k$, $k \in \mathbf{N}$. Pour tout $x \in [0,1[$, $x^{k+1} \in [0,1[$ donc $\Sigma u_n (x^{k+1})^n$ est convergente de somme $f(x^{k+1})$, ce qui tend vers ℓ lorsque $x \to 1^-$ par hypothèse. Aussi, $\Sigma (x^n)^k x^n$ est convergente pour tout $x \in [0,1[$ et a pour somme $\frac{1}{1-x^{k+1}}$, donc $(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(x^n)^k x^n = \frac{1}{1+x+\cdots+x^k}$ tend vers $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 x^k \mathrm{d}x$.
4. **Encadrement.** Soit $0 < a < 1$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $a^N < \frac{1}{2}$, si bien que $\chi(x^n) = 0$ pour tous $x \in [0,a]$ et $n \geqslant N$. D'où $\Sigma u_n \chi(x^n)$ converge uniformément sur tout segment $[0,a] \subset [0,1[$. Soit $x \in [0,1[$. Alors
$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\chi(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n p_1(x^n) &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\chi(x^n) - p_1(x^n)) && (\chi(1) = p_1(1) = 1)\\
&\leqslant A\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(\chi(x^n) - p_1(x^n)) && (nu_n \leqslant A \text{ et } \chi - p_1 \geqslant 0)\\
&\leqslant A\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(p_2(x^n) - p_1(x^n)) && (\chi \leqslant p_2 \text{ et } A \geqslant 0)\\
&= A\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-x^n}{n}(q_2(x^n) - q_1(x^n))x^n\\
&\leqslant A(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty}(q_2(x^n) - q_1(x^n))x^n.
\end{aligned}$$
Aussi, $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n p_2(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\chi(x^n) \leqslant A(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty}(q_2(x^n) - q_1(x^n))x^n.$$
(La dernière inégalité provient de $0 \leqslant \frac{1-x^n}{n} = (1-x)\frac{1+x+\cdots+x^{n-1}}{n} \leqslant 1$ pour tous $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbf{N}^*$.) D'après ce qui précède cette dernière majoration tend vers $A\int_0^1 (q_2(t) - q_1(t))\mathrm{d}t \leqslant A\varepsilon$ lorsque $x \to 1^-$.

Mais $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n p_i(x^n) \xrightarrow{x\to 1^-} \ell$ pour $i \in \{1,2\}$. On en déduit l'existence de $0<\eta<1$ tel que, pour tout $x \in \,]1-\eta, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \chi(x^n) \leqslant (A+1)\varepsilon + \ell, \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \chi(x^n) \geqslant \ell - (A+1)\varepsilon,$$

ce qui signifie

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \chi(x^n) - \ell \right| \leqslant (A+1)\varepsilon.$$

5. Conclusion. Soient $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $1-\eta < 2^{-\frac{1}{N}} < 1$ et $m \geqslant N$. Alors $x := 2^{-\frac{1}{m}} \in \,]1-\eta, 1[$, et

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \chi(x^n) - \ell \right| = \left| \sum_{n=0}^{m} u_n - \ell \right| \leqslant (A+1)\varepsilon,$$

et cela pour tout $m \geqslant N$. En conclusion Σu_n est CV, de somme ℓ. ■

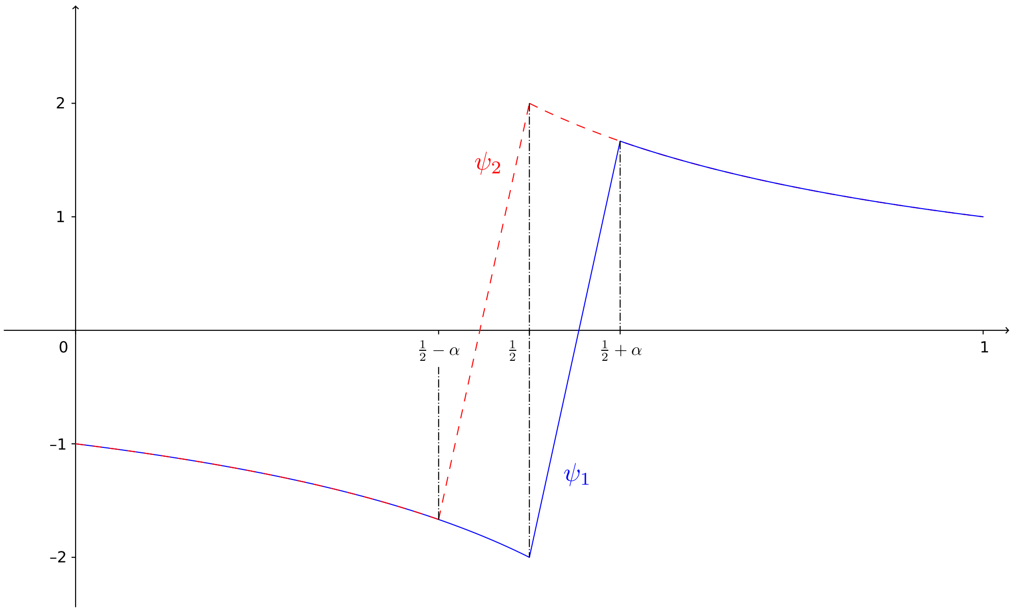

Figure 1 – Approximations de ψ.

Références. [Gou, X82]

203 Utilisation de la notion de compacité.

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

[Gou] Xavier Gourdon : *Analyse.* 2ème édition.

[X82] 1ère épreuve du concours d'entrée à l'école Polytechnique, 1982.